漸近展開を用いたアメリカンオプション価格の評価法*

高橋明彦
東京大学大学院経済学研究科

斎藤大河
メリルリンチ証券

2003 年 6 月 10 日

概 要

原資産価格が、ある一般的なクラスに属する拡散過程に従う場合、アメリカン・オプション価値が同条件のヨーロピアン・オプション価値と期限前行使価値に分解されることを示し、これに基づき、漸近展開法を用いたアメリカン・オプション価格の新しい評価方法を提案した。さらに、数値例として原資産価格が CEV(Constant Elasticity of Variance) 過程に従う場合を紹介した。

*草稿段階において、匿名の査読者及び日本銀行金融研究所研究第 1 課 FE グループの諸氏、特に内田氏より有益な助言を得たことに感謝する。なお、本稿で示されている内容及び意見は筆者に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

1　はじめに

アメリカン・オプション価格は、極めて特殊な場合を除いては解析的に評価できないため、ラティス法を始め様々効率的な数値計算法が研究されてきた。但し、原資産価格の従う確率過程が対数正規型の場合を除いては、種々の確率や期待値が解析的に計算できないことから、ラティスに代わる効率的な計算手法は殆ど提唱されていなかった。本論文は、原資産価格がある一般的なクラスに属する拡散過程に従う場合、アメリカン・オプション価格を漸近展開の手法を用いて効率良く計算する方法を提案した。またその際、対数正規型の場合に良く知られているアメリカン・オプション価格に関する分解式 (Karatzas and Shreve[1998]、Carr, Jarrow and Myneni[1992]、J. Huang, Subrahmanyam and Yu[1996] 等を参照) が、あるクラスの一般的拡散過程に従う原資産価格に対しても成り立つことを示した。

より詳しく述べると原資産価格 S_t が 1 次元拡散過程

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma(S_t)dW_t, S_0 = x(> 0)$$

に従う場合に（r は短期金利、δ は配当率）行使価格 K 満期 T のアメリカン・プットオプション価格の分解式

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq\tau\leq T} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+] = \\
&\mathbf{E}\left[e^{-rT}(K - S_T)^+\right] + rK\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-ru}1_{\{S_u\leq B_u\}}du\right] \\
&-\delta\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{-ru}S_u 1_{\{S_u\leq B_u\}}du\right]
\end{aligned}$$

（ただし B_t は最適行使境界と呼ばれる $0 \leq t \leq T$ 上で定義される確定的な関数）が成り立つことを示し、これに対して Takahashi[1995]、[1999] によりヨーロピアン・オプション価格の近似として提示された漸近展開の手法を応用することで近似的に計算する方法を開発した。

漸近展開法は、ヨーロッパ型の派生証券の評価に対し、不確実性がブラウン運動で表現されるとき、原資産価格が一般的な (多次元) マルコフ型の連続確率過程に従う場合 (国友・高橋 [1992]、Takahashi[1995]、[1999])、また、金利に関しては必ずしもマルコフ型とはならない連続確率過程に従う場合 (Kunitomo and Takahashi[2001]) も含め、実用に耐えうる精度の解析的な近似を与える統一的な方法である。漸近展開法は、直感的には、対象となる確率過程を、そのブラウン運動の係数がゼロのまわり、即ち、非確率的な過程のまわりで展開する確率的なテイラー展開と言え、数学的には、確率解析におけるマリアバン・渡辺理論 (例えば、Ikeda and Watanabe[1989]、Yoshida[1992] を参照) に基づき正当化される (Kunitomo and Takahashi[2003])。ファイナンスの分野における応用範囲も先述のヨーロッパ型派生証券の評価のほか多岐にわたり、動的最適ポートフォ

リオ (Takahashi and Yoshida[2001a]、[2003] 、Kobayashi, Takahashi and Tokioka[2001])、モンテカルロ・シミュレーションの効率化 (Takahashi and Yoshida[2001b]) などがある。本論文は、初めて漸近展開法がアメリカ型派生証券への適用が可能であることを示した。尚、これらファイナンスにおける漸近展開法の応用全般の解説は、国友・高橋 [2003] を参照されたい。

また、アメリカン・オプション評価の具体例として、S_t が CEV(Constant Elasiticity of Variance) 過程、即ち、

$$dS_t = (r - \delta)S_t dt + \sigma S_t^{\gamma} dW_t,\ (1/2 \leq \gamma \leq 1)$$

に従う場合について実際に数値計算を行い、漸近展開法の有効性を確認した。さらに、リチャードソンの 4 点近似の方法を合わせて用いることで、数値計算を高速化する方法も紹介し、数値例においてその有用性を示した。以下、プット・オプションを対象として考察するが、同様の議論は配当支払い或いは金利を生む原資産に対するコール・オプションに対しても当てはまる。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 章では、原資産価格がある一般的なクラスに属する拡散過程に従う場合に対し、アメリカン・オプション価値の分解式について述べ、証明を与える。第 3 章では、漸近展開法を用いたアメリカン・オプションの数値計算法の具体的なアルゴリズムを解説する。第 4 章では、CEV 過程への漸近展開の適用について説明し、それに対する具体的な数値例と考察を述べる。第 5 章では、今後の展望について簡単に触れる。補論においては、本論で述べられた主要な定理の証明及び、本論で用いられた漸近展開の具体的計算法を示す他、CEV 過程の解の存在と一意性、原資産価格が CEV 過程に従う場合のアメリカン・オプション価値の分解に関し説明する。また、アメリカン・オプション価値の分解を示すための基礎となる連続セミマルチンゲールのスネル包絡線に関する分解定理を紹介する。

2　アメリカン・オプション価格の分解式

本章では、原資産価格の変動がある一般的なクラスの拡散過程に従う場合に最適行使境界が存在すること、そしてアメリカン・プット・オプションの理論価格がこの最適行使境界を用いることにより、ヨーロピアン・オプション価格と早期行使プレミアムと呼ばれる部分に分解されることを示す。

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$ をフィルター付き完備確率空間、期間 $[0, T]$ は有限で、フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ は「通常の条件」(-*usual conditions*-例えば、Karatzas and Shreve[1996] の Definition 1.2.25 を参照) を満たし、連続であるとする。$W_t,\ (0 \leq t \leq T)$ は、$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$ 上定義された 1 次元標準ブラウン運動とする。ここで、$\mathbf{P}$ はファイナンスにおける同値マルチンゲール測度を表すものとする。

次に、$S_t^x,\ (0 \le t \le T)$ は確率微分方程式

$$dS_t = (r-\delta)S_t dt + \sigma(S_t)dW_t, S_0 = x(>0) \tag{1}$$

の解 (強い解) を表すものとする。ただし x,r,δ は正の定数、$\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は連続関数で、$y, z \in \mathbf{R}$ となる任意の y, z に対して $K_1 > 0$ が存在し、

$$\sigma(y)^2 \le K_1(1+y^2) \tag{2}$$
$$|\sigma(y) - \sigma(z)| \le h(|y-z|)$$

を満たすものとする。ここで、関数 h は $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $h(0) = 0$, 狭義単調増加で任意の $\epsilon > 0$ に対して $\int_{(0,\epsilon)} h^{-2}(u)du = \infty$ を満たすとする。

注意 1 この条件の下での強解の存在は渡辺 *[1974]* の定理 *3.1* で、強解の一意性は *Karatzas and Shreve[1996]* の *Proposition 5.2.13* で示されている。

以上の前提の下、まず最適行使境界の存在を示す定理を述べる。

定理 1 *(*最適行使境界の存在*) (1)*、*(2)* の下、$K > 0$ とし $0 < t \le T$、$0 < x < \infty$ となる任意の t、x に対して、

$$p(t,x) := \sup_{0 \le \tau \le t} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K - S_\tau^x)^+] \tag{3}$$

$$\mathcal{C}_t := \{x \in (0,\infty); p(t,x) > (K-x)^+\} \tag{4}$$

と定義する。

ただし上の sup は $0 \le \tau \le t$ となる任意の停止時刻 τ に渡ってとるものとする。この時、$a > 0$、$0 < l \le T$ となる任意の定数 a、l に対して

$$\mathbf{P}(\inf_{0 \le u \le l} S_u^x < a) > 0 \tag{5}$$

が成り立つならば、 ある非負の数 $c(t)$ が存在して、

$$\mathcal{C}_t = (c(t), \infty) \tag{6}$$

と表される。

(証明) 補論 6.1 を参照。

$p(t,x)$ は、原資産価格の現時点の価格 x、満期までの期間 t の (行使価格 K の) アメリカン・プット・オプションの現時点における価格を表している。また、式 (5) は、原資産価格が満期までに任意の (正の) 行使価格を下回る確率がゼロではないことを意味する条件である。さらに式 (6) は、現時点において原資産価格が $c(t)$ 以下であればオプションを保有し続けるより行使することが望ましく、$c(t)$ を超えていれば保有しつづける方が望ましいことを示しており、その意味で $c(t)$ は、最適行使境界と呼ばれる。

次に、アメリカン・プット・オプション価格がヨーロピアン・オプション価格と早期行使プレミアムと呼ばれる部分に分解されることを示す定理とその系を述べる。

定理 2 定理 *1* と同一の条件の下で、$B_t := c(T-t)$、$0 \le t < T$ と定義する。この時、

$$\begin{aligned}\sup_{0\le\tau\le T}\mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau^x)^+] &= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T^x)^+]+\mathbf{E}\left[rK\int_0^T e^{-ru}1_{\{S_u^x\le B_u\}}du\right]\\ &- \mathbf{E}\left[\delta\int_0^T e^{-ru}S_u^x 1_{\{S_u^x\le B_u\}}du\right] \qquad (7)\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明) 補論 6.2 を参照。

定理 2 より、初期時点の原資産価格が x で満期までの期間が $T-t(0\le t< T)$ のアメリカン・プット・オプション価格の分解式が得られる。

系 1 定理 *2* の条件の下、初期時点の原資産価格が x、満期までの期間が $T-t(0\le t<T)$ のアメリカン・プット・オプション価格に対して、

$$\begin{aligned}p(T-t,x) &= \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}(K-S_{T-t}^x)^+]+\mathbf{E}[\int_0^{T-t} rKe^{-ru}1_{\{S_u^x\le B_{t+u}\}}du]\\ &-\mathbf{E}[\int_0^{T-t}\delta S_u^x e^{-ru}1_{\{S_u^x\le B_{t+u}\}}du] \qquad (8)\end{aligned}$$

が成り立つ。

系 1 の証明

$$\begin{aligned}p(T-t,x) &= \sup_{0\le\tau\le T-t}[e^{-r\tau}(K-S_\tau^x)^+]\\ &= \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}(K-S_{T-t}^x)^+]+\mathbf{E}[\int_0^{T-t} rKe^{-ru}1_{\{S_u^x\le c(T-t-u)\}}du]\\ &-\mathbf{E}[\int_0^{T-t}\delta S_u^x e^{-ru}1_{\{S_u^x\le c(T-t-u)\}}du]\\ &= \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}(K-S_{T-t}^x)^+]+\mathbf{E}[\int_0^{T-t} rKe^{-ru}1_{\{S_u^x\le B_{t+u}\}}du]\\ &-\mathbf{E}[\int_0^{T-t}\delta S_u^x e^{-ru}1_{\{S_u^x\le B_{t+u}\}}du].\end{aligned}$$

式 (8) の右辺第 1 項は、ヨーロピアン・プット・オプション価格を表し、第 2、3 項は早期行使プレミアムと呼ばれるアメリカン・オプション特有の期限前行使の権利がもたらす付加価値を表現している。

注意 2 系 *1* と t 時点の最適行使境界 B_t の定義から、B_t が

$$\begin{aligned}K-z &= p(T-t,z)\\ &= \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}(K-S_{T-t}^z)^+]+\mathbf{E}[\int_0^{T-t} rKe^{-ru}1_{\{S_u^z\le B_{t+u}\}}du]\\ &-\mathbf{E}[\int_0^{T-t}\delta S_u^z e^{-ru}1_{\{S_u^z\le B_{t+u}\}}du] \qquad (9)\end{aligned}$$

を満たす最大の z であることが分かる。

3　漸近展開法によるアメリカン・オプション価格の評価

$x > 0$ となる任意の x に対して、確率微分方程式

$$dS_t = (r-\delta)S_t dt + \sigma^*(S_t)dW_t, S_0 = x \tag{10}$$

の強解を $S_t^x, 0 \le t \le T$ とし、これを株価の従う確率過程とする。

ただし安全資産金利 r、配当率 δ は正の定数で、ボラティリティを表す関数 $\sigma^* : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は連続関数で、前章の条件 (2) を満たすものとする。

3.1　アメリカン・オプション価格の計算方法

満期 T 行使価格 K のアメリカン・プットオプションの理論価格 P_A は

$$P_A = \sup_{0 \le \tau \le T} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K - S_\tau)^+] \tag{11}$$

とされているが、この条件の下では次の様に P_A は同じ条件のヨーロピアン・オプションと、早期行使プレミアムと呼ばれる部分に分解される (定理 2 参照)。

$$\begin{aligned} P_A = P_E(T,x) \quad &+ \quad rK\mathbf{E}[\int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u^x \le B_u\}} du\}] \\ &- \quad \delta\mathbf{E}[\int_0^T e^{-ru} S_u^x 1_{\{S_u^x \le B_u\}} du] \end{aligned} \tag{12}$$

ここで B_t は最適行使境界と呼ばれる $0 \le t \le T$ 上で定義される確定的な関数で、

$$\begin{aligned} K - z \quad = \quad & P_E(T-t,z) + rK\mathbf{E}[\int_0^{T-t} e^{-ru} 1_{\{S_u^z < B_{u+t}\}} du] \\ & -\delta\mathbf{E}[\int_0^{T-t} e^{-ru} S_u^z 1_{\{S_u^z < B_{u+t}\}} du] \end{aligned} \tag{13}$$

を満たす最大の z であることが分かっている。(注意 2 参照)

ただし

$$P_E(t,z) := \mathbf{E}[e^{-rt}(K - S_t^z)^+] \tag{14}$$

と定義する。

上の式を離散的に近似をし、S_t に関して漸近展開を使うことで B_t を求め、さらに P_A を求める。

$[0,T]$ の分割数を N、分割の幅 Δ を

$$\Delta := \frac{T}{N}$$

と定義することで $0, \Delta, 2\Delta, ..., N\Delta$ という離散的な時点を考える。

また最適行使境界 $B_{(N-1)\Delta}, B_{(N-2)\Delta}, ..., B_\Delta$ を以下の手順で求めて行く

ことにする。

まず

$$K - z = P_E(\Delta, z) \tag{15}$$

を満たす最大の z を $B_{(N-1)\Delta}$ と定義する。

次に

$$\begin{aligned} K - z &= P_E(2\Delta, z) + rK\Delta e^{-r\Delta}\mathbf{P}(S^z_\Delta < B_{(N-1)\Delta}) \\ &\quad -\delta\Delta e^{-r\Delta}\mathbf{E}[S^z_\Delta 1_{\{S^z_\Delta < B_{(N-1)\Delta}\}}] \end{aligned} \tag{16}$$

を満たす最大の z を $B_{(N-2)\Delta}$ と定義する。

$B_{(N-1)\Delta}, B_{(N-2)\Delta}, ..., B_{(N-i+1)\Delta}$ が分かったとして

$$\begin{aligned} K - z &= P_E(i\Delta, z) + rK\Delta\sum_{k=1}^{i-1} e^{-r(k\Delta)}\mathbf{P}(S^z_{k\Delta} < B_{(N-i+k)\Delta}) \\ &\quad -\delta\Delta\sum_{k=1}^{i-1} e^{-r(k\Delta)}\mathbf{E}[S^z_{k\Delta} 1_{\{S^z_{k\Delta} < B_{(N-i+k)\Delta}\}}] \end{aligned} \tag{17}$$

を満たす最大の z を $B_{(N-i)\Delta}$ と定義する。

以上の様にして最適行使境界 $B_{(N-1)\Delta}, B_{(N-2)\Delta}, ..., B_\Delta$ を求めたら、アメリカン・プットオプションの価格 P_A を

$$\begin{aligned} P_A &= P_E(T, x) + rK\Delta\sum_{k=1}^{i-1} e^{-r(k\Delta)}\mathbf{P}(S^z_{k\Delta} < B_{k\Delta}) \\ &\quad -\delta\Delta\sum_{k=1}^{i-1} e^{-r(k\Delta)}\mathbf{E}[S^z_{k\Delta} 1_{\{S^z_{k\Delta} < B_{k\Delta}\}}] \end{aligned} \tag{18}$$

として求める。

3.2 漸近展開法の適用

実際の数値計算においては、上の式における

$P_E(t, x)$、$\mathbf{P}(S_t < A)$、$\mathbf{E}(S_t 1_{\{S_t < A\}})$ を具体的に計算する必要がある。ここで A はある定数とする。そのために以下の漸近展開を考えることで $P_E(t, x)$、$\mathbf{P}(S_t < A)$、$\mathbf{E}(S_t 1_{\{S_t < A\}})$ を近似的に計算することを提案する。

まず原資産価格 S_t とその確率過程 (10) を漸近展開の対象となるパラメータ ϵ に明示的に依存させた形に書き直す。即ち、$S_t^{(\epsilon)}$ は次の確率微分方程式を満たすとする。

$$dS_t^{(\epsilon)} = (r - \delta)S_t^{(\epsilon)}dt + \epsilon\sigma(S_t^{(\epsilon)})dW_t, S_0^{(\epsilon)} = x \tag{19}$$

ただし、$\epsilon \in (0,1]$ とする。式 (10) との関係を見れば、式 (10) のボラティリティの項 $\sigma^*(S_t)$ を $\epsilon\sigma(S_t^{(\epsilon)})$ に置き換えていることに注意を要する。即ち、

$$\sigma^*(S_t) = \epsilon\sigma(S_t^{(\epsilon)})$$

である。漸近展開法は、$\epsilon = 0.0$、つまりボラティリティがゼロの確定的な過程のまわりで $S_t^{(\epsilon)}$ を確率的に展開し近似する手法ともみれる。$\epsilon = 0.0$ の時の原資産価格過程 $S_t^{(0)}$ は、式 (19) より $dS_t^{(\epsilon)} = (r-\delta)S_t^{(\epsilon)}dt$、$S_0^{(\epsilon)} = x$ であるから、

$$S_t^{(0)} := xe^{(r-\delta)t} \tag{20}$$

により与えられる。$S_t^{(\epsilon)}$ 自体を $\epsilon = 0.0$ のまわりで ϵ^2 オーダーまで展開すると、

$$S_t^{(\epsilon)} = S_t^{(0)} + \epsilon g_{1t} + \epsilon^2 g_{2t} + o(\epsilon^2), \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
g_{1t} &:= \int_0^t e^{(r-\delta)(t-s))}\sigma(S_s^{(0)})dW_s,\\
g_{2t} &:= \int_0^t e^{(r-\delta)(t-s))}\partial\sigma(S_s^{(0)})g_{1s}dW_s,\\
\partial\sigma(S_t^{(0)}) &:= \frac{\partial\sigma(S_t^{(\epsilon)})}{\partial S_t^{(\epsilon)}}|_{S_t^{(\epsilon)}=S_t^{(0)}}
\end{aligned}$$

であるが、第 1 項が確定的な $S_t^{(0)}$ となり分布の漸近展開を導出するには不適当であるため、以下の基準化された確率変数 $X_t^{(\epsilon)}$ を導入する。

$$X_t^{(\epsilon)} := \frac{S_t^{(\epsilon)} - S_t^{(0)}}{\epsilon}. \tag{22}$$

この時 $X_t^{(\epsilon)}$ の ϵ オーダーまでの漸近展開は、

$$X_t^{(\epsilon)} = g_{1t} + \epsilon g_{2t} + o(\epsilon)$$

により表される。g_{1t} は、平均 0、分散 Σ_t、$\Sigma_t := \int_0^t e^{2(r-\delta)(t-u)}\sigma^2(S_u^{(0)})du$ の 1 次元正規分布に従うことに注意すると、$X_t^{(\epsilon)}$ の $\epsilon \downarrow 0$ とした場合の極限分布は正規分布であることがわかり、さらに、Takahashi[1999] の Lemma 2.1(1) を用いると、

$$\mathbf{E}[g_{2t}|g_{1t} = x] = c_t x^2 + f_t,$$

$$\begin{aligned}
c_t &:= \frac{1}{\Sigma_t^2}\int_0^t e^{(r-\delta)(t-u)}\sigma(S_u^{(0)})\partial\sigma(S_u^{(0)})\int_0^u e^{2(r-\delta)(t-v)}\sigma^2(S_v^{(0)})dvdu\\
f_t &:= -c_t\Sigma_t,
\end{aligned}$$

が得られる。これらの基本的結果から $X_t^{(\epsilon)}$ の密度関数は、

$$g_{X_t^{(\epsilon)}}(x) \sim n[x;0,\Sigma_t] + \epsilon[-\frac{d}{dx}\{(c_t x^2 + f_t)n[x;0,\Sigma_t]\}] \tag{23}$$

と ϵ オーダーまで近似的に求められる (導出の詳細は Takahashi[1999] を参照)。ただし、

$$n[x;0,\Sigma_t] := \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\Sigma_t}\right),$$

と定義する。即ち、確率変数 $X_t^{(\epsilon)}$ は正規分布のまわりで展開され、その密度関数は $\epsilon\downarrow 0$ の時の極限分布である正規分布の密度関数 ((23) 式の右辺第 1 項) に、ϵ オーダーのある補正項 ((23) 式の右辺第 2 項) を加えたもので近似されていることがわかる。

この $X_t^{(\epsilon)}$ の密度関数の近似式 (23) に基づき、$\mathbf{P}(S_t^{(\epsilon)} < A)$、$\mathbf{E}(S_t^{(\epsilon)}1_{\{S_t^{(\epsilon)}<A\}})$ は近似的に計算できる (計算の詳細は補論 6.3 を参照)。即ち、

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_t^{(\epsilon)} < A) &= \mathbf{P}(\frac{S_t^{(\epsilon)}-S_t^{(0)}}{\epsilon} < \frac{A-S_t^{(0)}}{\epsilon})\\ &= \mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < \frac{A-S_t^{(0)}}{\epsilon})\\ &\sim N(\frac{a_t}{\sqrt{\Sigma_t}}) - \epsilon(c_t a_t^2 + f_t)n[a_t;0,\Sigma_t], \qquad (24)\end{aligned}$$

$$a_t := \frac{A-S_t^{(0)}}{\epsilon},$$

$$N(y) := \int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-x^2}{2})dx,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S_t^{(\epsilon)}1_{\{S_t^{(\epsilon)}<A\}}] &= \mathbf{E}[S_t^{(\epsilon)}1_{\{X_t^{(\epsilon)}<a_t\}}]\\ &= \mathbf{E}[(S_t^{(\epsilon)}-S_t^{(0)})1_{\{X_t^{(\epsilon)}<a_t\}} + S_t^{(0)}1_{\{X_t^{(\epsilon)}<a_t\}}]\\ &= \mathbf{E}[(S_t^{(\epsilon)}-S_t^{(0)})1_{\{X_t^{(\epsilon)}<a_t\}}] + S_t^{(0)}\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < a_t)\\ &= \epsilon\mathbf{E}[\frac{S_t^{(\epsilon)}-S_t^{(0)}}{\epsilon}1_{\{X_t^{(\epsilon)}<a_t\}}] + S_t^{(0)}\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < a_t)\\ &= \epsilon\mathbf{E}[X_t^{(\epsilon)}1_{\{X_t^{(\epsilon)}<a_t\}}] + S_t^{(0)}\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < a_t)\\ &\sim \epsilon(-\Sigma n[a_t;0,\Sigma_t] - \epsilon c_t a_t^3 n[a_t;0,\Sigma_t])\\ &\quad + S_t^{(0)}(N(\frac{a_t}{\sqrt{\Sigma_t}}) - \epsilon(c_t a_t^2 + f_t)n[a_t;0,\Sigma_t]), \qquad (25)\end{aligned}$$

である。従って、これらを用いることで $P_E(t,x)$ を近似的に計算できる。つまり、$P_E(t,x)$ を明示的に ϵ に依存させて、改めて $P_E^{\epsilon}(t,x)$ と書くと、

$$\begin{aligned}P_E^{\epsilon}(t,x) &= \mathbf{E}[e^{-rt}(K-S_t^{(\epsilon)})^+]\\ &= \mathbf{E}[e^{-rt}(K-S_t^{(\epsilon)})1_{\{S_t^{(\epsilon)}<K\}}]\\ &= e^{-rt}(K\mathbf{P}[S_t^{(\epsilon)} < K] - \mathbf{E}[S_t^{(\epsilon)}1_{\{S_t^{(\epsilon)}<K\}}])\\ &\sim e^{-rt}K(N(\frac{k_t}{\sqrt{\Sigma_t}}) - \epsilon(c_t k_t^2 + f_t)n[k_t;0,\Sigma_t])\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-e^{-rt}\{\epsilon(-\Sigma_t n[k_t;0,\Sigma_t]-\epsilon c_t k_t^3 n[k_t;0,\Sigma_t]) \\
&+S_t^{(0)}(N(\frac{k_t}{\sqrt{\Sigma_t}})-\epsilon(c_t k_t^2+f_t)n[k_t;0,\Sigma_t])\}. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、

$$k_t := \frac{K-S_t^{(0)}}{\epsilon}$$

とした。 この結果、十分小さな正の数 ϵ をとり

$$\sigma^*(x) = \epsilon\sigma(x) \qquad (27)$$

となるように $\sigma(x)$ を決め、上の漸近展開による近似式を前節で紹介したアメリカン・プットオプション価格の計算方法の中で用いることにより、価格及び最適行使境界を具体的に計算していくことが可能となる。

リチャードソンの近似法

本章の最後として、Geske and Johnson[1984] で紹介されているリチャードソンの近似法 (Richardson's approximation scheme) による数値計算の高速化の手法を説明する。P_A の近似値をより高速に求めたい場合は、リチャードソンの近似法を利用することができる。特にここでは、4 点近似を用いることにする。前章の離散化における時間間隔を h として計算した場合の評価値を $F(h)$ で表すと、

$$F(h) = F(0) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + o(h^3)$$

の関係式が成り立つ。特に 4 点近似の場合は $h = T/4$ であり、$F(ih)$ を各積分の離散化における時間間隔を ih として計算した場合の評価値とすれば、以下の関係式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
F(4h) &= F(0) + 4a_1h + 16a_2h^2 + 64a_3h^3 + o(h^3) \\
F(2h) &= F(0) + 2a_1h + 4a_2h^2 + 8a_3h^3 + o(h^3) \\
F\left(4/3h\right) &= F(0) + \frac{4}{3}a_1h + \frac{16}{9}a_2h^2 + \frac{64}{27}a_3h^3 + o(h^3) \\
F(h) &= F(0) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + o(h^3)
\end{aligned}
$$

さらに、h^3 のオーダーより小さい項、$o(h^3)$ を無視して $F(0)$ に関して解けば、$F(0)$ の近似値が得られる。

$$F(0) \sim -\frac{1}{6}F(4h) + 4F(2h) - \frac{27}{2}F(4/3h) + \frac{32}{3}F(h) \qquad (28)$$

$F(0)$ を求める P_A の値、$F(4h)$ を満期 T のヨーロピアン・オプションの値、$F(2h)$ を分割の幅を $T/2$ とした時の値、$F(4h/3)$ を分割の幅を $T/3$ とした時の値、$F(h)$ を分割の幅を $T/4$ とした時の値とすれば、上の 4 つの場合のみを計算すればよいことになり、得られる値の精度が要求水準に達していれば大幅に計算量が削減される。

4　数値例

この章では漸近展開法によるアメリカン・オプション価格評価の具体例として原資産価格が CEV(Constant Elasticity Variance) 過程に従う場合を紹介する。

4.1　CEV 過程

まず、CEV 過程とそれに対する漸近展開法の適用について概説する。CEV 過程とは次の様な確率微分方程式を満たす確率過程のことである。

$$dS_t = (r-\delta)S_t dt + \sigma S_t^{\gamma} dW_t, S_0 = x \tag{29}$$

ただし γ は

$$1/2 \leq \gamma \leq 1$$

を満たす数、r, δ, σ は正の定数、初期値 x は、$x > 0$ とする。CEV 過程の形式的な離散近似を考えると

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = (r-\delta)\Delta t + (\frac{\sigma}{S_t^{1-\gamma}})\Delta W_t$$

となるが、これは直感的には株価が 0 に近づく程株価の変化率の分散が大きくなるということを反映させたモデルとも言えるであろう。

CEV 過程に対してアメリカン・オプション価格の分解式が成り立つので (補論 6.4 を参照)、前章の計算方法を用いてアメリカン・オプションの価格を計算することができる。

漸近展開を考えるために次の確率微分方程式を考え、その解を $S_t^{(\epsilon)}$ とする。

$$dS_t = (r-\delta)S_t dt + \epsilon b S_t^{\gamma} dW_t,\ S_0 = x \tag{30}$$

ここで、

$$\sigma(x) := bx^{\gamma}$$

と置くと

$$\sigma'(x) = b\gamma x^{\gamma-1}$$

となることに注意する。

また

$$\alpha := r - \delta$$

と置き、$\alpha \neq 0$ の場合を考える。

まず Σ_t を計算する。

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= \int_0^t e^{2\alpha(t-u)}\sigma(S_u^{(0)})^2 du \\ &= \int_0^t e^{2\alpha(t-u)} b^2 (xe^{\alpha u})^{2\gamma} du\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= b^2x^{2\gamma}e^{2\alpha t}\int_0^t e^{2(\gamma-1)\alpha u}du \\
&= \frac{b^2x^{2\gamma}}{2(\gamma-1)\alpha}e^{2\alpha t}(e^{2(\gamma-1)\alpha t}-1). \qquad (31)
\end{aligned}
$$

次に c_t を計算する。

$$
\begin{aligned}
c_t\Sigma_t^2 &= \int_0^t e^{\alpha(t-u)}b(xe^{\alpha u})^\gamma b\gamma(xe^{\alpha u})^{\gamma-1}\int_0^u e^{2\alpha(t-v)}b^2(xe^{\alpha v})^{2\gamma}dvdu \\
&= b^4x^{4\gamma-1}\gamma e^{3\alpha t}\int_0^t e^{2(\gamma-1)\alpha u}\int_0^u e^{2(\gamma-1)\alpha v}dvdu \\
&= \frac{b^4x^{4\gamma-1}\gamma}{2(\gamma-1)\alpha}e^{3\alpha t}\int_0^t e^{2(\gamma-1)\alpha u}[e^{2(\gamma-1)\alpha u}-1]du \\
&= \frac{b^4x^{4\gamma-1}\gamma}{2(\gamma-1)\alpha}e^{3\alpha t}\frac{1}{4(\gamma-1)\alpha}(e^{2(\gamma-1)\alpha t}-1)^2 \\
&= \frac{b^4x^{4\gamma-1}\gamma}{8(\gamma-1)^2\alpha^2}e^{3\alpha t}(e^{2(\gamma-1)\alpha t}-1)^2
\end{aligned}
$$

となることに注意すると、

$$
\Sigma_t^2 = \frac{b^4x^{4\gamma}}{4(\gamma-1)^2\alpha^2}e^{4\alpha t}(e^{2(\gamma-1)\alpha t}-1)^2
$$

より、

$$
c_t = \frac{\gamma}{2xe^{\alpha t}} \qquad (32)
$$

となる。

4.2 計算結果と考察

本節では、原資産価格が CEV 過程に従う場合の、具体的な数値例の計算結果とそれに対する若干の考察を紹介する。

まず、数値例のパラメータに関する条件を $r = 0.0488$、$S(0) = 40$、$b = 100$ とし、$\gamma = 0.5, 0.66, 0.75$、$T = 0.0833$,0.3333,0.5833,1、$K = 35, 40, 45$、対数正規過程のボラティリティ20%、30%、40%、$\delta = 0$,0.1,0.3,0.5 の合計 432 ケースについて計算した。また ϵ は、ある正定数 b と原資産が対数正規過程に従う場合のボラティリティ σ^* とを所与として、

$$
\epsilon bS(0)^\gamma = \sigma^* S(0)
$$

により決まるものとする。即ち、ゼロ時点のブラウン運動の係数が対数正規過程のそれと一致するように ϵ を決めた。これらの前提の下で漸近展開に基づく手法の時間分割数を 300 とした場合の計算結果は、各配当率ごとにその要約を表 $1-4$ に、全結果を表 $6-9$ に掲げた。

例えば、表 6 は配当率 $\delta = 0$ の場合について $\gamma = 0.5, 0.66, 0.75$、$T = 0.0833$,0.3333,0.5833,1、$K = 35, 40, 45$、ボラティリティを $\sigma^* = 0.2, 0.3, 0.4$ として、計 108 ケースについて計算したものである。この表において、本

論文の漸近展開によるアメリカン・オプションの値を (ame a.e.) Nelson and Ramaswamy [15] のラティスを用いたアメリカンオプションの値を (ame latti) 、(ame latti) を基準値とした場合の、(ame a.e.) の誤差率を (error1) とした。ここで、基準値としたラティス法の時間分割数 1000 の場合の値は安定的で、例えば、$\gamma = 0.75$、$K = 35$、$\delta = 0.0$、$T = 1$、$\sigma^* = 0.4$ のケースでは、ラティスの時間分割数 998 の場合の値から分割数 999 の場合の値の変化率は 0.02%、999 分割から 1000 分割の値の変化率は -0.02% 等であった。また、漸近展開を用いて計算したヨーロピアン・オプションの部分の値を (eur a.e.)、Nelson and Ramaswamy のラティスを用いたヨーロピアン・オプションの値を (eur latti)、(eur latti) を真の値と見た時の (eur a.e.) の誤差率を (error2) とした。さらに、漸近展開を用いて計算した早期行使プレミアム、即ち、(ame a.e.) と (eur a.e.) との差を (premi a.e.)、Nelson and Ramaswamy のラティスを用いた早期行使プレミアム、即ち、(ame latti) と (eur latti) との差を (premi latti)、(premi latti) を基準値とした場合の (premi a.e.) の誤差率を (error3) とした。最後に、漸近展開の手法にリチャードソンの 4 点近似法を用いて高速化した値を (ame rich.)、(ame latti) を基準値とした時の (ame rich.) の誤差率を (error4) とした。なお (error1)、(error2)、(error3)、(error4) において、アメリカン・オプションの値が 0.01 未満のものは除いた。今回の場合では、$T = 0.0833$、$K = 35$、$\sigma^* = 0.2$ のケースがこれに該当する。表 7、8、9 は $\delta = 0.01, 0.03, 0.05$ の場合について表 6 と同様に計算した結果である。

表 1 は配当率 $\delta = 0$ の場合に $\gamma = 0.5, 0.66, 0.75$ の 3 ケースについて、(ame a.e.)、(ame rich.)、(eur a.e.) 各々の平均 (average)、二乗平均誤差の平方根 (rmse)、最大値 (max)、最小値 (min) を $T = 0.0833, 0.3333, 0.5833, 1$、$K = 35, 40, 45$、ボラティリティを $\sigma^* = 0.2, 0.3, 0.4$ とした 36 個の標本を基に計算した結果を示している。表 2-4 は各々、配当率 $\delta = 0.01, 0.03, 0.05$ の場合について表 1 と同様に計算した結果である。

表 5 は今回計算した 432 ケースのうち早期行使プレミアムがアメリカン・オプションの価格に占める割合が 5 パーセント以上となるものに関する結果である。

表 10 は配当率 $\delta = 0$ のうち早期行使プレミアムの部分の誤差が最小となる $\gamma = 0.75$、$T = 1$、$\sigma^* = 0.2$、$K = 45$([A] とする）のケースと、最大となる $\gamma = 0.75$、$T = 1$、$\sigma^* = 0.4$、$K = 35$（[B] とする）のケースの計算結果を示しており、図 1 ー図 6 は、各々の早期行使境界、S_T の密度関数に対し漸近展開法による計算結果をラティス法による計算結果と比較して図示したものである。

まず表 6 の (ame latti)、(ame a.e.)、(error1) の列を見てみると、誤差率 (error1) は概ね 1 パーセント未満であり、本論文の漸近展開によるアメリカンオプションの計算精度が良いことが分かる。また (ame rich.)、(error4) の列を見ると誤差率 (error4) は概ね 2 パーセント未満であり、計算に要する時間はほぼ一瞬であることを勘案すれば、リチャードソンの 4 点近似法による高速化が有効性であることが分かる。アメリカン・オプ

ションの (error1) が 1 パーセントを超えているものに注目してみると、γ、T、ボラティリティが大きく OTM(out of the money) のものほど誤差率が大きい傾向が見てとれる。実際 $\gamma = 0.75, T = 1, K = 35$、$\sigma^* = 0.4$ のケースが誤差率が 1.69 パーセントで表 6 の中の最大誤差となっている。この要因としては漸近展開法は、$X_t^{(\epsilon)}$ の分布を正規分布 ($\gamma = 0.0$) により近似しているので γ が 0.0 から乖離すればするほど、分布の近似精度が悪くなるであろうこと、さらに、$\epsilon = 0$、即ち分散ゼロまわりで漸近展開しているので、分散が大きいほど、即ち T、σ^* が大きいほど近似精度悪くなるであろうことが挙げられ、この結果、分布の差が最も影響する OTM(out of the money) の場合の価格の誤差が最大となっていると考えられる。同様の理由でアメリカン・プットの場合は配当率が低いほど同じ行使価格に対して相対的に OTM となるため、他の条件を同一とすれば配当率が低いほど誤差が大きくなる傾向がみてとれる (表 1-4、表 6-9 を参照)。

さらに、アメリカン・オプション価値をヨーロピアン・オプション価値と早期行使プレミアムに分割し、それぞれの誤差を調べた。(premi latti)、(premi a.e.) を比較すると、どのケースについてもほぼ等しい値になっており、アメリカン・オプション特有の早期行使プレミアムが非常にうまく計算できていることが分かる。早期行使プレミアムの誤差率 (error3) を見ると早期行使プレミアムの数値 (premi latti)(premi a.e.) が非常に小さいにも関わらず、誤差率がとても小さいこと、早期行使プレミアムのウェイトが本質的に重要なウェイトの高いケースほど早期行使プレミアムの誤差率が非常に小さいことが見てとれる。表 7、8、9 については、表 6 と同様の考察が当てはまるので省略する。

表 5 は、全ケースのうち早期行使プレミアムのアメリカン・オプションの価格に占めるウェイトが 5 パーセントを超えるものを集めたが、早期行使プレミアムが特に精度良く計算されていることが分かる。また δ が小さく、T が大きく、ボラティリティが小さく、ITM(in the money) のものほどウェイトが大きいという傾向も見てとれる。例えばウェイトが 12 パーセントを超えるものはいずれも $\delta = 0$、$T = 1$、$\sigma^* = 0.2$、$K = 45$ となるものである。

アメリカン・オプションの価格が精度良く計算できているケースと比較的精度が落ちるケースについて (表 10 参照)、最適行使境界と S_T の密度関数を数値的にもとめた結果が図 1 から図 6 である。

ケース [B]($\delta = 0$、$\gamma = 0.75$、$T = 1$、$\sigma^* = 0.4$、$K = 35$) は表 6 の中でアメリカンオプションの誤差 (error1) が最大のものを選び、ケース [A]($\delta = 0$、$\gamma = 0.75$、$T = 1$、$\sigma^* = 0.2$、$K = 45$) はケース [B] との比較のため、$\delta = 0$、$\gamma = 0.75$、$T = 1$ の中で誤差率 (error1) が最小のものを選んだ。先述のように相対的にボラティリティが大きく OTM のケース [B] が誤差が大きくなっている。まず最適行使境界 B_t のグラフ（図 1、図 2) を比較すると、[A]、[B] どちらのケースも精度良く最適行使境界を計算できていることが見てとれるが、[A] の方がさらにラティスから得られる最適行使境界に近く計算できていることが分かる。

さらに [A]、[B] それぞれのケースについて S_T の密度関数が漸近展開によってどの様に計算されているかを見てみる。(図 3、図 5）どちらもモンテカルロによってシュミレートされる密度関数とほぼ一致しているが [A] の方がより一致していることが見て取れる。ヨーロピアンオプションの部分の評価に影響を与える行使価格 K 以下の密度について拡大したのが図 4、図 6 である。これを見ると [A] のケースが密度関数を非常にうまく近似できていることが分かる。また [B] のケースでは K 以下では漸近展開で計算される密度の方がモンテカルロによってシュミレートされる密度よりも大きく、このことによって実際に漸近展開によるアメリカン・オプションの値がラティスによる基準値よりも大きくなっているものと予測できる。

5　おわりに

本論文では、原資産価格の従う拡散過程のボラティリティ関数が時間パラメータに依存しない場合について検討したが、時間パラメータに依存する場合についても同様の結果が得られる (Takahashi[2002] 参照)。また、数値例についてもファイナンスで教科書的に良く知られた CEV 過程を用いた。しかし、上場先物オプションの多くはアメリカン・オプションであり、市場オプション価格を良く近似する原資産価格が従う確率過程を推定することは実際上重要であると思われる。

本論文で提示した方法は、その推定のための効率的計算方法として有用である。特に、リチャードソンの近似法を合わせて用いた漸近展開法は、擬似解析的手法で高速であるため、市場価格データを用いた確率過程の推定などに対しては、ラティス法などの他の手法に比べて簡易で効率的であると思われる。実際の適用に関しては今後の研究課題とする。また、本論文では価格の近似に焦点をあてたが、デルタ、ガンマ等のリスク指標の計算も実用上重要であり漸近展開法による近似精度の検討も今後の課題としたい。さらに漸近展開法は広範囲の確率過程に適用可能な統一的な近似手法であるが、数値的により高い精度を要求する場合は、より高次の漸近展開の適用 (Takahashi[1999]) やモンテカルロ法との組み合わせ (Takahashi and Yoshida[2001b]) による対応が考えられその詳しい分析は今後の研究に委ねることとしたい。

6　補論

6.1　定理 1 の証明

まず以下の事柄に注意する。

$0 \leq x \leq y$ の時

$$\mathbf{P}[S_t^x \leq S_t^y, \forall 0 \leq t \leq T] = 1$$

となることは Karatzas and Shreve [7] の Proposition 5.2.18 で示されている。

$$\mathbf{E}[\sup_{0\le t\le T}|S_t^x|^2]<\infty$$

は $K_2>0$ が存在して

$$(r-\delta)^2x^2+\sigma(x)^2\le K_2(1+x^2)$$

となることから分かる（例えば長井 [2000] の補題 3.2.6)。

$e^{-(r-\delta)t}S_t^x, 0\le t\le T$ はマルチンゲールになる。なぜなら伊藤の公式より

$$e^{-(r-\delta)t}S_t^x=x+\int_0^t e^{-(r-\delta)u}\sigma(S_u^x)dW_u.$$

$r-\delta\ge 0$ の時

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\int_0^t e^{-2(r-\delta)u}\sigma^2(S_u^x)du] &\le \mathbf{E}[\int_0^t \sigma^2(S_u^x)du]\\
&\le \mathbf{E}[\int_0^t K_1(1+S_u^{x2})du]\\
&= K_1t+K_1\mathbf{E}[\int_0^t S_u^{x2}du]\\
&= K_1t+K_1\int_0^t \mathbf{E}[S_u^{x2}]du\\
&\le K_1t+K_1\int_0^t \mathbf{E}[\sup_{0\le s\le T}|S_s^x|^2]du\\
&= Kt+tK_1\mathbf{E}[\sup_{0\le s\le T}|S_s^x|^2]\\
&< \infty
\end{aligned}$$

となり、$r-\delta<0$ の時も同様の結果が得られるからである。よって $e^{-(r-\delta)t}S_t^x, 0\le t\le T$ はマルチンゲールになることが分かる。

$p(t,x)\ge(K-x)^+$ となることは

$$\begin{aligned}
p(t,x) &= \sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau^x)^+]\\
&\ge \mathbf{E}[(K-S_0^x)^+]\\
&= (K-x)^+
\end{aligned}$$

から分かる。

$p(t,x)>0$ となることは次の様にして分かる。

$0<x<K$ の時

$$p(t,x)\ge(K-x)^+>0$$

$K\le x$ の時は

$$\tau_1:=t\wedge\inf\{u>0;S_u^x\le\frac{K}{2}\}$$

と定義すると

$$
\begin{aligned}
p(t,x) &\geq \mathbf{E}[e^{-r\tau_1}(K-S^x_{\tau_1})^+] \\
&\geq \mathbf{E}[e^{-r\tau_1}\frac{K}{2}1_{\{\tau_1<t\}}] \\
&= \frac{K}{2}\mathbf{E}[e^{-r\tau_1}1_{\{\tau_1<t\}}] \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

よって $p(t,x)>0.$

定理 1 の証明

$$p:(0,T]\times(0,\infty)\longrightarrow[0,\infty) \tag{33}$$

は連続であることを示す。

まず t に関する右連続性を示す。(t_0,x_0) を $[0,\infty)^2$ の任意の点とし、また、$t_0\leq t$ となる任意の t をとる。

$$\tau^*:=\inf\{u\in[0,t);p(t-u,x_0)=(K-S^{x_0}(u))^+\}\wedge t$$

$$\tau_0:=\tau^*\wedge t_0$$

と定義する。

この時

$$\sup_{0\leq\tau\leq t}\mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S^{x_0}_{\tau})^+]=\mathbf{E}[e^{-r\tau^*}(K-S^{x_0}_{\tau^*})^+]$$

となることに注意する。

$$
\begin{aligned}
|p(t,x_0)-p(t_0,x_0)| &= p(t,x_0)-p(t_0,x_0) \\
&= \mathbf{E}[e^{-r\tau^*}(K-S^{x_0}(\tau^*))^+]-p(t_0,x_0) \\
&\leq \mathbf{E}[e^{-r\tau^*}(K-S^{x_0}(\tau^*))^+]-\mathbf{E}[e^{-r\tau_0}(K-S^{x_0}(\tau_0))^+] \\
&= \mathbf{E}[e^{-r\tau^*}(K-S^{x_0}(\tau^*))^+-e^{-r\tau_0}(K-S^{x_0}(\tau_0))^+] \\
&\leq \mathbf{E}[\{e^{-r\tau^*}(K-S^{x_0}(\tau^*))-e^{-r\tau_0}(K-S^{x_0}(\tau_0))\}^+] \\
&\leq \mathbf{E}[(e^{-r\tau_0}S^{x_0}(\tau_0)-e^{-r\tau^*}S^{x_0}(\tau^*))^+] \\
&= \mathbf{E}[(e^{-rt_0}S^{x_0}(t_0)-e^{-r\tau^*}S^{x_0}(\tau^*))^+1_{\{\tau_0=t_0\}}] \\
&= \mathbf{E}[(e^{-rt_0}S^{x_0}(t_0)-e^{-r\tau^*}S^{x_0}(\tau^*))^+1_{\{t_0\leq\tau^*\}}] \\
&\leq \mathbf{E}[\sup_{t_0\leq u\leq t}(e^{-rt_0}S^{x_0}(t_0)-e^{-ru}S^{x_0}(u))^+1_{\{t_0\leq\tau^*\}}] \\
&\leq \mathbf{E}[\sup_{t_0\leq u\leq t}(e^{-rt_0}S^{x_0}(t_0)-e^{-ru}S^{x_0}(u))^+].
\end{aligned}
$$

二番目の不等式では任意の実数 α、β に対して

$$\alpha^+-\beta^+\leq(\alpha-\beta)^+$$

が成り立つことを用いた。

ここで

$$
\begin{aligned}
0 &\le \sup_{t_0\le u\le t}(e^{-rt_0}S^{x_0}(t_0)-e^{-ru}S^{x_0}(u))^+\\
&\le 2\sup_{t_0\le u\le t}|e^{-ru}S^{x_0}(u)|\\
&\le 2\sup_{0\le u\le T}|S^{x_0}(u)|.
\end{aligned}
$$

$\mathbf{E}[\sup_{0\le u\le T}|S^{x_0}(u)|]<\infty$ なので収束定理が使え、$t\downarrow t_0$とした時、右辺は 0 に収束する。

t に関する左連続性は上と同様の方法に示すことが出来る。

p が x についてリプシッツ連続であることを示す。$0<x\le y$ となる任意の x、y と $0<t<\infty$ に対して

$$\tau_x := \inf\{u\in[0,t); p(t-u,x)=(K-S(u))^+\}\wedge t$$

と定義する。

この時 $x\le y$ ならば

$$p(t,x)\ge p(t,y)$$

となることが以下の様にして分かる。

$$p(t,x)=\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S^x_\tau)^+]$$

$$p(t,y)=\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S^y_\tau)^+]$$

$0\le\tau\le t$ となる任意の停止時刻 τ に対して、

$$S^x_\tau\le S^y_\tau$$

$$e^{-r\tau}(K-S^x_\tau)^+\ge e^{-r\tau}(K-S^y_\tau)^+$$

なので

$$p(t,x)\ge p(t,y)$$

となる。

$$
\begin{aligned}
|p(t,x)-p(t,y)| &= p(t,x)-p(t,y)\\
&= \mathbf{E}[e^{-r\tau_x}(K-S^x(\tau_x))^+]-p(t,y)\\
&\le \mathbf{E}[e^{-r\tau_x}(K-S^x(\tau_x))^+]-\mathbf{E}[e^{-r\tau_x}(K-S^y(\tau_x))^+]\\
&= \mathbf{E}[e^{-r\tau_x}\{(K-S^x(\tau_x))^+-(K-S^y(\tau_x))^+\}]\\
&\le \mathbf{E}[e^{-r\tau_x}(S^y(\tau_x)-S^x(\tau_x))]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}[e^{-\delta\tau_x} e^{-(r-\delta)\tau_x}(S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\
&\leq \mathbf{E}[e^{-(r-\delta)\tau_x}(S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\
&= y - x \\
&= |x - y|.
\end{aligned}
$$

ここでは $0 \leq u \leq t$ となる任意の u に対して $S^x(u) \leq S^y(u)$、$e^{-(r-\delta)t}S(t)$ がマルチンゲールになることを使った。$x > y$ の時も同様に示せるので p が x についてリプシッツ連続であることが言える。

以上から p は連続であることは

$$
\begin{aligned}
|p(t,x) - p(t_0,x_0)| &\leq |p(t,x) - p(t,x_0)| + |p(t,x_0) - p(t_0,x_0)| \\
&\leq |x - x_0| + |p(t,x_0) - p(t_0,x_0)| \\
&\quad \longrightarrow 0 \ ((t,x) \rightarrow (t_0,x_0) \text{ とする時})
\end{aligned}
$$

として示される。

次に

$$t \longmapsto p(t,x) \text{ は非減少関数} \tag{34}$$

$$x \longmapsto p(t,x) \text{ は非増加関数} \tag{35}$$

$$x \longmapsto x + p(t,x) \text{ は非減少関数} \tag{36}$$

であることを示す。

一つ目は $p(t,x)$ の定義より明らか。二つ目はリプシッツ連続を示す途中ですでに示したので、三番目を示す。

$0 < x \leq y$、$0 < t < \infty$ となる任意の x、y、t に対し

$$
\begin{aligned}
p(t,x) - p(t,y) &\leq \mathbf{E}[e^{-r\tau_x}(K - S^x(\tau_x))^+] - \mathbf{E}[e^{-r\tau_x}(K - S^y(\tau_x))^+] \\
&\leq \mathbf{E}[e^{-r\tau_x}(S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\
&= \mathbf{E}[e^{-\delta\tau_x} e^{-(r-\delta)\tau_x}(S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\
&\leq \mathbf{E}[e^{-(r-\delta)\tau_x}(S^y(\tau_x) - S^x(\tau_x))] \\
&= y - x.
\end{aligned}
$$

よって

$$p(t,x) + x \leq p(t,y) + y$$

となり三番目を示すことができる。

定理の証明に戻る。$x \in \mathcal{C}_t$ とする。この時 $x < y$ となる任意の y に対し

$$
\begin{aligned}
p(t,y) &\geq p(t,x) + x - y \\
&> (K - x)^+ + x - y \\
&\geq (K - x) + x - y \\
&= K - y
\end{aligned}
$$

$p(t,y) > 0$ より

$$p(t,y) > (K-y)^+$$

よって

$$y \in \mathcal{C}_t$$

また $p(t,x)$ は連続なので

$$\mathcal{C}_t = \{x \in (0,\infty); p(t,x) > (K-x)^+\}$$

は開集合。よってある非負の数 $c(t)$ が存在して

$$\mathcal{C}_t = (c(t), \infty)$$

と書けることが分かる。

6.2 定理 2 の証明

最初に定理 2 の証明で用いられる Rutkowski[1994] による連続セミマルチンゲールのスネル包絡線に対する分解定理を紹介する。なお、この定理の証明の詳細は、原論文及び補論 6.5 を参照されたい。

定理 A 1

$$X_t = X_0 + M_t + V_t;\ 0 \le t \le T \tag{37}$$

は、連続セミマルチンゲール (但し、X_0 は定数)、M_t は $M_0 = 0$ の連続局所マルチンゲール、V_t は $V_0 = 0$ の連続適合有限変動過程とし、

$$\mathbf{E}[\sup_{0 \le t \le T} |X_t|] < \infty$$

とする。

V_t の減少部分、V_t^d に対し、ある非負適合過程 v_t が存在し、

$$dV_t^d = v_t dt$$

と書けるとする。

さらに、任意の時刻 $t \in \{0, T\}$ に対し、

$$\mathbf{E}[X_{\tau_t^*}] = ess \sup_{t \le \tau \le T} \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_t], \quad \forall 0 \le t \le T$$

を満たす停止時刻 τ_t^* が存在して、

$$\mathbf{E}[X_{\tau_0^*}] = \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}\left[\int_{\tau_0^*}^T 1_{\{\tau_u^* = u\}} dV_u\right] \tag{38}$$

が成立する。

定理 2 の証明

まず $B_t < K$ となることに注意しておく。
　なぜなら

$$\mathcal{C}_{T-t} = (c(T-t), \infty)$$

であったが $p(T-t, K) > 0, (K-K)^+ = 0$ より

$$p(T-t, K) > (K-K)^+.$$

よって

$$K \in \mathcal{C}_{T-t}$$

であるから

$$B_t = c(T-t) < K$$

となる。
　$e^{-rT}(K-S_T)^+$ に対し、凸関数に対する一般化された伊藤の公式を用いて、

$$\begin{aligned} e^{-rT}(K-S_T)^+ &= (K-S_0)^+ + \int_0^T (-rKe^{-ru}1_{\{S_u \le K\}} + \delta S_u e^{-ru} 1_{\{S_u \le K\}})du \\ &\quad - \int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u \le K\}} \sigma(S_u) dW_u + \int_0^T e^{-ru} dL_u^K(S). \end{aligned}$$

ここで、$L_u^K(S)$ は、S_t の K における局所時間とする。
　X_t, M_t, V_t を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} X_t &:= e^{-rt}(K-S_t)^+ \\ M_t &:= -\int_0^T e^{-ru} 1_{\{S_u \le K\}} \sigma(S_u) dW_u \\ V_t &:= \int_0^T (-rKe^{-ru}1_{\{S_u \le K\}} + \delta S_u e^{-ru} 1_{\{S_u \le K\}})du + \int_0^T e^{-ru} dL_u^K(S). \end{aligned}$$

この時 σ に関する一次増大条件と $\mathbf{E}[\sup_{0 \le t \le T} |S_t^x|^2] < \infty$ から Burkholder の不等式 (例えば、Karatzas and Shreve[1996] の Theorem 3.3.28 を参照) 等を用いて

$$\mathbf{E}[\sup_{0 \le t \le T} |X_t|] < \infty$$

が成り立つことが分かる。
　$rKe^{-rt}1_{\{S_t \le K\}}$ は、非負適合過程。

$$\tau_t^* := \inf\{u \in [t, T); S_u \le B_u\} \wedge T$$

と定義すると、

$$\mathbf{E}[e^{-r\tau_t^*}(K-S_{\tau_t^*})^+ | \mathcal{F}_t] = \operatorname{ess} \sup_{t \le \tau \le T} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+ | \mathcal{F}_t] \quad \text{for all } t \in [0, T]$$

となる。この時定理 A 1 より、

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le\tau\le T}\mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+] &= \mathbf{E}[e^{-r\tau_0^*}(K-S_{\tau_0^*})^+] \\
&= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T)^+]-\mathbf{E}\left[\int_{\tau_0^*}^T 1_{\{\tau_u^*=u\}}dV_u\right] \\
&= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T)^+]-\mathbf{E}\left[\int_{\tau_0^*}^T 1_{\{S_u\le B_u\}}dV_u\right] \\
&= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T)^+]-\mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{\{S_u\le B_u\}}dV_u\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\int_0^T 1_{\{S_u\le B_u\}}dV_u\right] &= \mathbf{E}[\int_0^T(-rKe^{-ru}1_{\{S_u\le K\}}1_{\{S_u\le B_u\}}+\delta S_u e^{-ru}1_{\{S_u\le K\}}1_{\{S_u\le B_u\}})du \\
&\quad +\int_0^T e^{-ru}1_{\{S_u\le B_u\}}dL_u^K(S)].
\end{aligned}$$

$S_t\le B_t$ なる t においては、$B_t<K$ より、$L_t^K(S)$ の増分は 0 であること、
また $1_{\{S_u\le B_u\}}1_{\{S_u\le K\}}=1_{\{S_u\le B_u\}}$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le\tau\le T}\mathbf{E}[e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+] &= \mathbf{E}[e^{-rT}(K-S_T)^+]+\mathbf{E}\left[rK\int_0^T e^{-ru}1_{\{S_u\le B_u\}}du\right] \\
&\quad -\mathbf{E}\left[\delta\int_0^T e^{-ru}S_u 1_{\{S_u\le B_u\}}du\right]
\end{aligned}$$

を得る。

6.3 漸近展開の計算

漸近展開による $X_t^{(\epsilon)}$ の密度関数の近似式が与えられると、$\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)}<k)$、
$\mathbf{E}[X_t^{(\epsilon)}1_{\{X_t^{(\epsilon)}<k\}}]$ は次の様に計算できる。

定理 A 2 確率変数 X の密度関数が

$$g_{X_t^{(\epsilon)}}(x)=n[x;0,\Sigma]+\epsilon[-\frac{d}{dx}\{h(x)n[x;0,\Sigma]\}]$$

であるとする。ただし、$\epsilon\in(0,1]$、Σ_t、c_t は正の定数とし

$$h(x):=c_t x^2+f_t$$

$$f_t:=-c_t\Sigma_t$$

$$n[x;0,\Sigma_t]:=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\Sigma_t}\right)$$

と定義する。この時

$$\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)}<k)=N(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}})-\epsilon(c_t k^2+f_t)n[k;0,\Sigma_t],$$

$$\mathbf{E}[X_t^{(\epsilon)}1_{\{X_t^{(\epsilon)}<k\}}] = -\Sigma_t n[k;0,\Sigma_t] - \epsilon c_t k^3 n[k;0,\Sigma_t].$$

但し、

$$N(y) := \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-x^2}{2}) dx.$$

証明

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < k) &= \int_{-\infty}^{k} g_{X_t^{(\epsilon)}}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{k} [n[x;0,\Sigma_t] + \epsilon[-\frac{d}{dx}\{h(x)n[x;0,\Sigma_t]\}] dx.
\end{aligned}$$

ここで、

$$\int_{-\infty}^{k} n[x;0,\Sigma_t] dx = N(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}}).$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{k} \epsilon[-\frac{d}{dx}\{h(x)n[x;0,\Sigma_t]\}] dx \\
&= -\epsilon[h(x)n[x;0,\Sigma_t]]|_{x=-\infty}^{k} \\
&= -\epsilon[h(k)n[k;0,\Sigma_t]] \\
&= -\epsilon(c_t k^2 + f_t) n[k;0,\Sigma_t].
\end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{P}(X_t^{(\epsilon)} < k) = N(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}}) - \epsilon(c_t k^2 + f_t) n[k;0,\Sigma_t].$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X1_{\{X_t^{(\epsilon)}<k\}}] &= \int_{-\infty}^{k} x g_{X_t^{(\epsilon)}}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{k} x \left\{ n[x;0,\Sigma_t] + \epsilon[-\frac{d}{dx}\{h(x)n[x;0,\Sigma_t]\}] \right\} dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{k} x n[x;0,\Sigma_t] dx &= \int_{-\infty}^{k} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\Sigma_t}\right) dx \\
&= -\Sigma_t n[x;0,\Sigma_t]|_{x=-\infty}^{k} \\
&= -\Sigma_t n[k;0,\Sigma_t].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{k} x \frac{d}{dx}(h(x)n[x;0,\Sigma_t]) dx &= x h(x) n[x;0,\Sigma_t]|_{-\infty}^{k} - \int_{-\infty}^{k} h(x) n[x;0,\Sigma_t] dx \\
&= k h(k) n[k;0,\Sigma_t] - \int_{-\infty}^{k} h(x) n[x;0,\Sigma_t] dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{k} h(x) n[x;0,\Sigma_t] dx &= \int_{-\infty}^{k} (c_t x^2 + f_t) n[x;0,\Sigma_t] dx \\
&= c_t \int_{-\infty}^{k} x^2 n[x;0,\Sigma_t] dx + f_t N(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{k} x^2 n[x;0,\Sigma_t]dx &= \int_{-\infty}^{k} x\frac{d}{dx}(-\Sigma_t n[x;0,\Sigma_t])dx \\ &= -\Sigma_t(xn[x;0,\Sigma_t]|_{-\infty}^{k} - \int_{-\infty}^{k} n[x;0,\Sigma_t]dx) \\ &= -\Sigma_t(kn[k;0,\Sigma_t] - N(\frac{k}{\sqrt{\Sigma_t}})).\end{aligned}$$

以上の計算から

$$\mathbf{E}[X_t^{(\epsilon)} 1_{\{X_t^{(\epsilon)}<k\}}] = -\Sigma_t n[k;0,\Sigma_t] - \epsilon c_t k^3 n[k;0,\Sigma_t].$$

6.4 CEV 過程

ここではCEV 過程における非負の強解の存在と一意性、またアメリカンオプション価格の分解式 (定理 2) が適用出来ることを説明する。

次の確率微分方程式

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma(S_t \vee 0)^\gamma dW_t, S_0 = x$$

を考える。

ただし γ は

$$1/2 \leq \gamma < 1$$

となる定数とする。

まず次の事実に注意する。

定理 B 1 γ は $1/2 \leq \gamma \leq 1$ を満たす数とする。

任意の非負の数 x、y に対してある正の数 K が存在し

$$|x^\gamma - y^\gamma| \leq K|x-y|^\gamma$$

が成り立つ。

証明

$x > y \geq 0$ の場合に示す。

$$\frac{x^\gamma - y^\gamma}{(x-y)^\gamma} = \frac{1-u^\gamma}{(1-u)^\gamma}.$$

ここで

$$u := y/x$$

とした。

この時

$$0 \leq u < 1$$

であるが

$$\frac{1-u^\gamma}{(1-u)^\gamma}|_{u=0} = 1$$

$$\lim_{u\uparrow 1}\frac{1-u^\gamma}{(1-u)^\gamma}=0$$

であり、$\frac{1-u^\gamma}{(1-u)^\gamma}$ は $0\le u<1$ で連続だから、ある正の数 K が存在して

$$\frac{1-u^\gamma}{(1-u)^\gamma}<K,\ 0\le u<1$$

となることが分かる。

よって

$$|x^\gamma-y^\gamma|\le K|x-y|^\gamma$$

となる。

$x=y$ の時は明らかで、$x<y$ の場合も上と同様に示すことが出来る。

上の確率微分方程式において強解 $S_t^x,\ 0\le t<\infty$ が一意に存在し、初期値 x が $x\ge 0$ の時は

$$S_t^x\ge 0, 0\le t<\infty, (\mathbf{P}-a.s.)$$

となることが次の様にして分かる。

存在は渡辺 [1974] の定理 3.1 から分かる。

一意性は定理 B 1 と、Karatzas and Shreve[1996] の Proposition 5.2.13 からわかる。

$x=0$ の時は

$$S_t^0=0, 0\le t\le\infty$$

となる。

比較定理 (Karatzas and Shreve[1996] の Proposition 5.2.18) から $x>0$ に対して

$$\mathbf{P}[S_t^0\le S_t^x, 0\le t<\infty]=1$$

が成り立つ。

よって初期値 $x>0$ に対しては

$$\mathbf{P}[S_t^x\ge 0, 0\le t<\infty]=1$$

となる。

定理 B 2 $x>0$ の時 $a>0$、$0<l<\infty$ となる任意の a、l に対して

$$\mathbf{P}(\inf_{0\le u\le l}S_u^x<a)>0$$

となる。

証明

$\alpha > 0$ の場合を考える。

$$S_t = x + \int_0^t \alpha S_u du + \int_0^t \sigma S_u^\gamma dW_u$$

であるが、伊藤の公式より

$$e^{-\alpha t} S_t = x + \int_0^t \sigma e^{-\alpha u} S_u^\gamma dW_u$$

$$M_t := \int_0^t \sigma e^{-\alpha u} S_u^\gamma dW_u$$

とする。

$$\mathbf{P}(\inf_{0 \le u \le l} S_u^x \ge a) = 1$$

として矛盾を示す。
　$0 \le t \le l$ に対して

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_t &= \int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha u} S_u^{2\gamma} du \\ &\ge \int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha u} a^{2\gamma} du \quad (\mathbf{P}-a.s.). \end{aligned}$$

$0 \le s < \int_0^l \sigma^2 e^{-2\alpha u} a^{2\gamma} du$ となる任意の s に対して停止時刻 $T(s)$ を

$$T(s) := \inf\{t \ge 0; \langle M \rangle_t > s\}$$

と定義する。
　ここで

$$0 \le T(s) \le l$$

となることに注意する。
　$0 \le s < \int_0^l \sigma^2 e^{-2\alpha u} a^{2\gamma} du$ となる s に対して

$$B_s := M_{T(s)}, \quad \mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{T(s)}$$

と定義すると、時間変更された確率過程 B_s はブラウン運動となる。
　このことから $M_{T(s)}$ は平均 0、分散 s の正規分布に従うことが分かる。
　よって任意の実数 c に対して

$$\mathbf{P}(\inf_{0 \le u \le l} M_u < c) > 0.$$

ここで

$$S_t = e^{\alpha t}(x + M_t)$$

であったから

$$\mathbf{P}(\inf_{0 \le u \le l} S_u^x < a) > 0$$

となってこれは

$$\mathbf{P}(\inf_{0\le u\le l} S_u^x \ge a) = 1$$

に反する。

$\alpha > 0$ の場合に定理を示すことが出来たので、比較定理 (Karatzas and Shreve[1996] の Proposition 5.2.18) を用いることで $\alpha \le 0$ の場合にも

$$\mathbf{P}(\inf_{0\le u\le l} S_u^x < a) > 0$$

となることが分かる。

6.5 定理 A 1 の証明

ここでは Rutkowski[1994] で述べられている連続セミマルチンゲールのスネル包絡線の分解定理の証明を紹介する。

定理 A 1 の証明

Z を X のスネル包絡線とする。即ち、Z を X を上からおさえる最小の優マルチンゲールとする。この時 Jacka [4] より次のことが成り立つ。

$$Z \text{ は連続}.$$

任意の停止時刻 η に対して

$$Z_\eta = \operatorname{ess}\sup_{\eta\le\tau\le T} \mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\eta].$$

$$\tau_t^* = \inf\{u \in [t,T] | Z_u = X_u\}.$$

Z_t のドゥーブ・メイエー分解を

$$Z_t = Z_0 + N_t + B_t$$

とする。

ここで、N_t は連続マルチンゲール、B_t は連続減少過程。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{\tau_0^*}] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[X_{\tau_0^*}|\mathcal{F}_0]] \\
&= \mathbf{E}[\operatorname{ess}\sup_{0\le\tau\le T} \mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_0]] \\
&= \mathbf{E}[Z_0] \\
&= \mathbf{E}[Z_T - N_T - B_T] \\
&= \mathbf{E}[Z_T] - \mathbf{E}[B_T] \\
&= \mathbf{E}[\operatorname{ess}\sup_{T\le\tau\le T} \mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_T]] - \mathbf{E}[B_T] \\
&= \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}[B_T] \\
&= \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}[\int_0^T 1_{\{\tau_u^*=u\}} dB_u] - \mathbf{E}[\int_0^T 1_{\{\tau_u^*>u\}} dB_u].
\end{aligned}$$

ここで
$$\int_0^T 1_{\{\tau_u^*>u\}}dB_u = 0 \ \ (\mathbf{P}-a.s.)$$
となることを示。
$$\mathcal{D} := \{\tau_t^* > t\} = \{Z_t \neq X_t\}$$
と定義すると、Z_t、X_t は連続なので $\mathcal{D}$ は開集合。

$\mathcal{D}$ の中にある区間で、長さが $1/n$ 以上のものに対し、その左端を L_k^n、右端を R_k^n と定義する $(k=1,2,...,N_n)$。

また $S_k^n := L_k^n + 1/n$ とする、この時 $\tau^*_{S_k^n} = R_k^n$ となることに注意すると
$$\begin{aligned} Z_{S_k^n} &= \operatorname*{ess\,sup}_{S_k^n \le \tau \le T} \mathbf{E}[X_\tau|\mathcal{F}_{S_k^n}] \\ &= \mathbf{E}(X_{\tau^*_{S_k^n}}|\mathcal{F}_{S_k^n}) \\ &= \mathbf{E}(X_{R_k^n}|\mathcal{F}_{S_k^n}) \\ &= \mathbf{E}(Z_{R_k^n}|\mathcal{F}_{S_k^n}). \end{aligned}$$
また
$$\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{N_n}[S_k^n, R_k^n).$$
この時 $\mathcal{D}_n := \bigcup_{k=1}^{N_n}[S_k^n, R_k^n)$ とすると
$$\begin{aligned} \int_0^T 1_{\{\tau_u^*>u\}}dB_u &= \int_0^T 1_{\mathcal{D}}(u)dB_u \\ &= \int_0^T 1_{\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n}(u)dB_u \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^T 1_{\mathcal{D}_n}(u)dB_u \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n}(B_{R_k^n} - B_{S_k^n}). \end{aligned}$$
$Z_{S_k^n} = \mathbf{E}(Z_{R_k^n}|\mathcal{F}_{S_k^n})$ であったから
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(B_{R_k^n} - B_{S_k^n}|\mathcal{F}_{S_k^n}) &= \mathbf{E}(Z_{R_k^n} - Z_{S_k^n}|\mathcal{F}_{S_k^n}) - \mathbf{E}(N_{R_k^n} - N_{S_k^n}|\mathcal{F}_{S_k^n}) \\ &= 0. \end{aligned}$$
B_t は減少過程で $B_{R_k^n} - B_{S_k^n} \le 0$ なので、$B_{R_k^n} - B_{S_k^n} = 0$ が分かる。

よって
$$\int_0^T 1_{\{\tau_u^*>u\}}dB_u = 0$$
となる。
$$U_t := Z_t - X_t$$
と定義する。

この時
$$U_t \ge 0$$

である。

U_t の 0 における局所時間を $L_t^0(U)$、 左局所時間を $\tilde{L}_t^0(U)$ とすると

$$L_t^0(U) - \tilde{L}_t^0(U) = 2\int_0^t 1_{\{0\}}(U_u)d(B_u - V_u)$$

(Protter[1992] 参照)。

また U_t は非負より $\tilde{L}_t^0(U) = 0$ となることと、$\{\tau_u^* = u\} = \{U_u = 0\}$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_0^T 1_{\{\tau_u^*=u\}} dB_u &= \int_0^T 1_{\{0\}}(U_u)dB_u \\
&= \frac{1}{2}L_t^0(U) + \int_0^T 1_{\{0\}}(U_u)dV_u \\
&= \frac{1}{2}L_t^0(U) + \int_0^T 1_{\{\tau_u^*=u\}} dV_u.
\end{aligned}$$

次の補題を示す。

補題 1 非負連続セミマルチンゲール $Y_t = Y_0 + M_t + C_t$ に対して、ある非負適合過程 ξ_t が存在し、C_t の増大部分 C_t^i が $dC_t^i = \xi_t dt$ と書けるとする。この時 Y_t の 0 における局所時間を $L_t^0(Y)$ とすると、$L_t^0(Y) = 0$ となる。

$\tilde{L}_t^0(Y) = 0$ であり、$Y_t \geq 0$ なので

$$\begin{aligned}
L_t^0(Y) &= 2\int_0^t 1_{\{0\}}(Y_u)dC_u \\
&= 2\int_0^t 1_{\{0\}}(Y_u)dC_u^i \\
&= 2\int_0^t 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u du, \ \forall 0 \leq t \leq T
\end{aligned}$$

$d\langle M\rangle_u$ のルベーグ分解を

$$d\langle M\rangle_u = m_u du + d\langle M\rangle_u^s$$

とする。ここで、m_uは非負適合過程。

$\mathcal{W} := \{u \in [0,T] | m_u > 0\}$ とし、$\mathcal{W}^c$ を $[0,T]$ での $\mathcal{W}$ の補集合とする。

この時

$$\begin{aligned}
L_T^0(Y) &= 2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}}(u)du + 2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}^c}(u)du \\
&= 2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}}(u)m_u^{-1}(d\langle M\rangle_u - d\langle M\rangle_u^s) \\
&\quad +2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}^c}(u)du \\
&= J_1 - J_2 + J_3
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$
\begin{aligned}
J_1 &:= 2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}}(u) m_u^{-1} d\langle M\rangle_u \\
J_2 &:= 2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}}(u) m_u^{-1} d\langle M\rangle_u^s \\
J_3 &:= 2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}^c}(u) du
\end{aligned}
$$

と置いた。

$$
\langle M\rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} L_t^z(Y) dz
$$

であるから、フビニの定理を用いて

$$
J_1 = 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T 1_{\{0\}}(z)\xi_u 1_{\mathcal{W}}(u) m_u^{-1} dL_u^z(Y) dz = 0
$$

を得る。

$$
\begin{aligned}
0 \le J_2 &= 2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}}(u) m_u^{-1} d\langle M\rangle_u^s \\
&\le 2\int_0^T 1_{\{0\}}(Y_u)\xi_u 1_{\mathcal{W}}(u) m_u^{-1} d(\langle M\rangle_u^s + m_u du) \\
&= J_1
\end{aligned}
$$

$J_1 = 0$ より $J_2 = 0$ を得る。

$$
\mathcal{M} := \{u \in [0,T] | m_u = Y_u = 0\}
$$

とし、λ をルベーグ測度とする。$\lambda(\mathcal{M}) = 0$ ならば J_3 の定義から $J_3 = 0$ となる。

正の確率で $\lambda(\mathcal{M}) > 0$ となる場合は次の様な時間変更を行う。

$$
g(t) := \int_0^t 1_{\mathcal{M}}(u) du,\ \forall 0 \le t \le T
$$

とし、$g(t)$ の逆関数として右連続なものを $g^{-1}(t)$ とする。

$\tau_t = g^{-1}(t)$ とし、$\tilde{Y}_t := Y_{\tau_t}$、$\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{\tau_t}$ と置くと $\tilde{Y}_t$ は $\tilde{\mathcal{F}}_t$ 連続セミマルチンゲールとなり、また $\lambda\{u \in [0,T] | \tilde{Y}_u = 0\} = 0$ となるので $\tilde{Y}_t$ の 0 における局所時間は 0 になる。

また $L_T^0(Y) = L_{g(T)}^0(Y)$ となるから (El Karoui[1978] 参照)、$L_T^0(Y) = 0$ が成り立つ。

定理の証明に戻る。

U_t の有界変動項の増大部分は V^d で、$dV_t^d = v_t dt$ なので、補題 1 より $L_t^0(U) = 0$ となる。

よって

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{\tau_0^*}] &= \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}[\int_0^T 1_{\{\tau_u^*=u\}} dB_u] - \mathbf{E}[\int_0^T 1_{\{\tau_u^*>u\}} dB_u] \\
&= \mathbf{E}[X_T] - \mathbf{E}[\int_0^T 1_{\{\tau_u^*=u\}} dB_u] \\
&= \mathbf{E}[X_T] + \frac{1}{2} L_t^0(U) + \int_0^T 1_{\{\tau_u^*=u\}} dV_u \\
&= \mathbf{E}[X_T] + \int_0^T 1_{\{\tau_u^*=u\}} dV_u
\end{aligned}
$$

となる。

参考文献

[1] P. Carr, R. Jarrow and R. Myneni, "Alternative characterizations of American put options," Mathematical Finance, 1992.

[2] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, Second Edition, North-Holland/Kodansha, Tokyo, 1989.

[3] J. Huang, M. G. Subrahmanyam and G. G. Yu, "Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method and its Implementation," Review of Financial Studies, Spring 1996.

[4] S. D. Jacka, Local Times, Optimal Stopping and Semimartingales, Annals of Probability, 21, 1993, pp.329-339.

[5] EL Karoui,"Sur les Montees des Semi-martingales, Asterisque," 1978, pp. 52-53

[6] R. Geske and H. Johnson,"The American Put Value Analytically," Journal of Finance, 39, 1984.

[7] I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Graduate Texts in Mathematics 113, Springer-Verlag, 2nd edition, 1996.

[8] I. Karatzas and S. E. Shreve, Methods of Mathematical Finance, Springer, 1998.

[9] T.Kobayashi, A.Takahashi and N. Tokioka, Dynamic Optimality of Yield Curve Strategies, Discussion Paper Series Faculty of Economics University of Tokyo, CIRJE-F-141(submitted), 2001.

[10] 国友直人, 高橋明彦, 平均オプション価格の評価法, ファイナンス研究 vol 14, 1992, pp.1-19.

[11] N. Kunitomo and A.Takahashi, The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims, Mathematical Finance 11, 2001, pp.117-151.

[12] N. Kunitomo and A.Takahashi, On Validity of the Asymptotic Expansion Approach in Contingent Claim Analysis, The Annals of Applied Probability, 13 No.3, August, 2003(to appear).

[13] 国友直人, 高橋明彦, 数理ファイナンスの基礎-漸近展開の手法と応用-, 東洋経済新報社, 2003(近刊).

[14] 長井英生, 確率微分方程式, 共立出版, 2000.

[15] D. B. Nelson, and K. Ramaswamy, "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models," Review of Financial Studies, 3, 1990.

[16] P. Protter, Stochastic Integration and Differential Equations, Springer, 1992.

[17] M. Rutkowski, "The early exercise premium representation of foreign market American options," Mathematical Finance, 4, 1994, pp.313-326.

[18] A.Takahashi, "Essays on the Valuation Problems of Contingent Claims," Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1995.

[19] A.Takahashi, "An Asymptotic Expansion Approach to Pricing Financial Contingent Claims," Asia-Pacific Financial Markets, 6, 1999, pp.115-151.

[20] A.Takahashi, "An Asymptotic Expansion Approach to American Options," Unpublished manuscript, 2002.

[21] A.Takahashi and N. Yoshida, "An Asymptotic Expansion Scheme for Optimal Portfolio for Investment," 数理解析研究所講究録 1215「経済の数理解析」京都大学数理解析研究所, 2001a.

[22] A.Takahashi and N. Yoshida, "The Asymptotic Expansion Approach with Monte Carlo Simulations," Preprint, 2001b.

[23] A.Takahashi and N. Yoshida, "An Asymptotic Expansion Scheme for Optimal Invextment Problems," Preprint, 2003.

[24] 渡辺信三, 確率微分方程式, 産業図書, 1974.

[25] N. Yoshida, "Asymptotic Expansions of Maximum Likelihood Estimator for Small Diffusion via the theory of Malliavin-Watanabe, Probability Theory and Related Fields," 92, 1992, pp.275-311.